

## **Linguagem natural versus formal: diferenciação importante na construção de uma semiosfera de aprendizagem da matemática<sup>1</sup>**

Méricles Thadeu Moretti<sup>2</sup>

Celia Finck Brandt<sup>3</sup>

Roberta Nara Sodré de Souza<sup>4</sup>

**Eixo 14 – Educação Matemática**

**Trabalho Encomendado**

**RESUMO:** pretendemos propor uma semiosfera, um espaço que congregue diversos sistemas semióticos que contribuam para a aprendizagem da matemática. As bases para a sua construção têm em Lotman, Saussure e Duval os autores principais: em Lotman nos inspiramos na noção de fronteira e de semiosfera criada para a cultura, em Saussure a importância do signo no seio do sistema semiótico e, em Duval, a coordenação das operações possíveis nesses sistemas semióticos. Lotman concebe uma fronteira para cada uma das semiosferas e isso nos levou a construir essa noção a partir da discussão entre linguagem formal e língua natural em seu uso na aprendizagem da matemática. Pensamos que os conjuntos integrados dessas semiosferas podem fundamentar ações de ensino que visam à aprendizagem matemática.

**Palavras-chave:** Semiosfera; Fronteira de uma semiosfera; Sistema semiótico; Aprendizagem matemática.

**ABSTRACT:** we intend to propose a semiosphere, a space that brings together many semiotic systems that contribute to the learning of mathematics. To achieve this purposes, we are based on Lotman, Saussure and Duval: Lotman inspired us with his notion of frontier and semiosphere created for culture; Saussure brings the importance of the sign within the semiotic system; and Duval, the coordination of possible operations on semiotic systems. Lotman conceives a boundary for each semiosphere, and this led us to build a notion of border, based on the discussion between formal language and natural language in the process of learning mathematics. We defend that the integrated sets of these semiospheres can support educational practices aimed at mathematics learning.

**Keywords:** Semiosphere; Border of a semiosphere; Semiotic system; Mathematics learning

### **INTRODUÇÃO**

Pretendemos, neste estudo, compor várias ideias com objetivo de criar um espaço favorável à aprendizagem da matemática. A aprendizagem de cada objeto matemático será composta por um conjunto de semióticas que permite desvendar as diversas facetas deste

<sup>1</sup> Apoio CNPq.

<sup>2</sup> Universidade Federal de Santa Catarina. E-mail: mthmoretti@gmail.com

<sup>3</sup> Universidade Estadual de Ponta Grossa. E-mail: brandt@bigghost.com.br

<sup>4</sup> Instituto Federal de Santa Catarina. E-mail: roberta.sodre@ifsc.edu.br

mesmo objeto. No entanto, é necessário, neste tipo de processo, levar em conta ao que Radford nos alerta:

Pelo menos, em princípio, “comparar” e “contrastar” teorias são sempre possíveis: a partir de duas teorias de educação matemática, só é possível buscar semelhanças ou diferenças. Em contraste, para “coordenar”, para “localmente integrar” ou “sintetizar” teorias parece ser uma tarefa mais delicada. RADFORD (2008, p. 319).

A possibilidade de integrar dois ou mais sistemas semióticos ganha força em um espaço semiótico que Yuri M. Lotman chama de semiosfera:

El camino recorrido por las investigaciones semióticas durante los últimos veinte años permite tomar muchas cosas de otro modo. Como ahora podemos suponer, no existen por sí solos en forma aislada sistemas precisos y funcionalmente unívocos que funcionan realmente. La separación de éstos está condicionada únicamente por una necesidad heurística. Tomado por separado, ninguno de ellos tiene, en realidad, capacidad de trabajar. Sólo funcionan estando sumergidos en un continuum semiótico, completamente ocupado por formaciones semióticas de diversos tipos y que se hallan en diversos niveles de organización. A ese continuum, por analogía con el concepto de biosfera introducido por V. I. Vernadski<sup>5</sup>, lo llamamos semiosfera. LOTMAN (1996, p. 11).

A semiosfera reúne, portanto, nas palavras de Lotman (1990, 1996, 2005) um espaço de convivência de várias semióticas que devem ser reconhecidas e consideradas. Cada objeto matemático compreende uma série de sistemas semióticos que podem ser reunidos em um espaço semiótico, uma semiosfera, objetivando à aprendizagem da matemática.

Para Lotman (1996, p.11) a semiosfera põe distintos recursos em um espaço voltado sobre si mesmo e é “neste espaço que torna possível a realização de processos comunicativos e de produção de uma nova informação.” e afirma que a semiosfera é

...um espaço semiótico para a existência e funcionamento de linguagens, não a soma total das diferentes linguagens; em um certo sentido, a semiosfera tem uma existência prévia e está em constante interação com as linguagens. LOTMAN (1990, p. 123).

---

<sup>5</sup> V. I. Vernadski(1863, 1945) geólogo russo especialista em geoquímica (Grand Larousse Universel, 1989).

Compreendemos as semiosferas da aprendizagem matemática como espaços semióticos que dependem de cada objeto de aprendizagem. Quando pensamos, por exemplo, na aprendizagem da geometria, não podemos deixar de considerar as várias semióticas relacionadas às apreensões e aos olhares em geometria estudadas por Duval (1995, 1996, 2003B, 2012B) e eventualmente estudos de outros autores como foi o caso do trabalho de Moretti (2013) em que foram usados Frostig e Horne (1964) e Hoffer (1977) que, a partir dos trabalhos van Hiele e van Hiele-Geldof (1958), propuseram uma categorização de capacidades espaciais. Este estudo voltou-se para as séries iniciais do ensino fundamental com o objetivo de tratar mais especificamente da aprendizagem da visualização em geometria. Quando pensamos na aprendizagem da álgebra, são os sistemas semióticos relacionados à função discursiva de designação, que cumprem papel essencial (língua natural, linguagem algébrica, linguagem numérica).

Ainda Lotman (1996, p. 11) nos faz refletir bastante sobre o fato de como concebe a semiosfera, um espaço **delimitado** em relação ao espaço externo e, nessa delimitação, cria uma fronteira que “separa” os espaços interno e externo à semiosfera. Que fronteira é essa? Pensamos que uma resposta, inspirados nos trabalhos de Duval (1995, 2004) para o caso da aprendizagem matemática, seja a linguagem própria para o ensino da matemática que discutiremos a seguir.

## 1 - LÍNGUA NATURAL VERSUS LINGUAGEM FORMAL

A língua natural é essencial na comunicação entre alunos e entre alunos e o professor e é fundamental na criação de um espaço de construção didática em sala de aula. Mas na aprendizagem matemática não é a língua natural, apenas com a função de comunicação que é exigida, outras funções, como por exemplo, a designação, são imprescindíveis. Duval caracteriza diversas funções da linguagem que são importantes para a atividade matemática e que permitem:

- designar objetos;
- dizer alguma coisa dos objetos que se designa sob a forma de uma proposição enunciada;
- religar a proposição enunciada a outras de forma coerente (descrição, inferência...);
- marcar um valor, ou modo, ou o estatuto acordado a uma expressão por aquele que a enuncia. DUVAL (1995, p. 91)

Estas funções são chamadas, nesta ordem, de função referencial, apofântica, de expansão discursiva e de reflexividade.

O que se entende aqui por linguagem formal, voltada à aprendizagem matemática no ensino fundamental e médio, é a linguagem que permite que essas funções sejam exercitadas nas atividades de aprendizagem matemática. Referindo-se, ao caso apenas da função de designação, Duval assinala que:

...o que é essencial no domínio de uma língua natural, não é o conhecimento do vocabulário, mas ter consciência de todas as operações que permitem articular as palavras em sintagmas nominais para designar objeto, proposições, ou para efetuar uma descrição coerente... DUVAL (2016)

As operações da função referencial vão desde a operação de designação pura à operação de descrição passando pelas operações de categorização simples e de determinação. Estas operações caracterizam os diversos tipos de designação, seja por designar de forma pura um objeto simplesmente apontando o dedo ou atribuindo um nome, seja por caracterizar o objeto por uma de seus atributos, seja por delimitar o campo de aplicação da operação de categorização, seja por designar um objeto cruzando os resultados de diversas operações de categorização (DUVAL, 1995, p. 98 e 99). A descrição é uma das operações de designação mais complexa uma vez que se torna necessária por conta da ausência de palavras correspondentes, não há palavras suficientes, em uma língua, para designar todos os objetos que se queira. Um estudo mais aprofundado sobre este tema e, mais geralmente, sobre as funções discursivas de uma língua, consultar o Capítulo II em Duval (1995) e os artigos Brandt e Moretti e Bassoi (2014), Dionizio, Brandt e Moretti (2015) que discutem essas funções em situação de aplicação prática.

Elegemos o espaço, ao qual se refere Lotman (1996, p.12 – 16), que separa o espaço semiótico interno do espaço semiótico externo, a linguagem formal, o espaço da linguagem que leva em conta as funções discursivas da língua. Este anteparo semiótico tem por objetivo além de priorizar a linguagem formal na aprendizagem matemática, contar com as funções discursivas, filtrar termos da linguagem natural que muitas vezes perturbam certos elementos conceituais em matemática. É evidente que a língua natural povoa o ambiente escolar, mas quando nos referimos à aprendizagem matemática é a linguagem formal que permite que as funções discursivas sejam consideradas: o enunciado de um problema é, em geral, escrito na língua natural para fins de comunicação. No entanto, para o procedimento de resolução são as funções discursivas que precisam ser tratadas. Por exemplo, o problema seguinte encontrado em manuais escolares:

*Um pai tem 27 anos a mais do que o seu filho. Determinar as idades de ambos sabendo-se que somam 51 anos.*

Uma forma para resolver este problema, o aluno poderá designar as idades do pai e do filho, por exemplo, com as letras P e F e montar o sistema de equação ( $P - F = 27$  e  $P + F = 51$ ) para em seguida achar os valores de P e F e, deste modo, responder o problema. A designação utilizada é a designação pura - dar um nome a um objeto matemático (nomear as idades do pai e de filho). Parece ser simples, mas nos anos iniciais da aprendizagem da álgebra, mesmo a designação pura, é causa de sérios transtornos (DUVAL, 2011). Além do mais, esse problema exige uma redesignação que consiste em designar a idade do pai em função da idade do filho. Essa redesignação é funcional:  $P = F + 27$ . E, por fim uma dupla designação mais complexa que consiste em designar a idade do pai em função da idade do filho em outra designação:  $P + F = 51$  (ou  $P = F + 27$  e  $(F + 27) + F = 51$ ).

Assinalamos, ainda, que esse problema esconde uma peça, a expressão “tem a mais” exige, no lugar da operação de adição sugerida pela palavra “mais”, a operação de subtração: o enunciado do problema não é transparente com a expressão matemática equivalente. A esse fenômeno, Duval (1995, p. 47 - 59) dá o nome de não congruência semântica e que pode ser responsável por um índice muito baixo de sucesso na resolução de um problema em que este fenômeno é aparente e que deve ser levada em conta na linguagem formal, muitas vezes embutido na língua natural: o problema das idades do pai e do filho está enunciado em língua natural, mas são os elementos significativos formais que precisam ser levadas em conta para a sua resolução. É esta fronteira que fazemos referência, buscar nos elementos da linguagem natural aqueles elementos significativos da linguagem formal que podem ser transformados em outros elementos semióticos em um novo sistema de representação semiótica: o enunciado do problema pertence a um sistema semiótico discursivo que foi transformado em um sistema semiótico não discursivo próprio à álgebra para poder ser resolvido. Observemos que esta passagem exigiu o filtro da linguagem formal para que a transformação em um sistema de equação pudesse ser feita.

Este filtro não pode ser desconsiderado na aprendizagem matemática, ele permite diferenciar as duas linguagens (natural e formal) e evidenciar a necessidade de se considerar as passagens assimétricas entre uma e outra.

De um modo geral, as diferentes linguagens na semiosfera são semioticamente assimétricas, pois não possuem correspondências semânticas mútuas, assim toda a semiosfera

pode ser considerada, nos termos de Lotman (1990, p. 127), como “um gerador de informação”.

## 2 REGISTRO DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Aproximamos a ideia de registro de representação semiótica a um sistema de elementos como, por exemplo, a de um conjunto que possui regras próprias de tratamento. No conjunto dos racionais podemos considerar dois tipos de registro (além de outros), o registro dos números racionais com vírgula e o registro dos números racionais na forma de fração. As operações em cada um desses registros, não acontecem da mesma forma, pois possuem regras próprias de funcionamento: as contas  $3/5 + 5/4$  e, de forma equivalente,  $0,6 + 1,25$  processam-se de forma diferente. Mesmo a relação de ordem entre esses registros funciona de forma diferente. As operações semióticas em cada registro são chamadas de tratamento e a passagem de um a outro, chama-se conversão. Assim, a transformação de  $3/5 + 5/4$  em  $37/20$  ou  $0,6 + 1,25$  em  $1,85$  são tratamentos em cada um dos registros, mas a transformação entre os dois registros, por exemplo, de  $3/5$  em  $0,6$  é uma conversão.

A semiosfera da aprendizagem matemática comporta diversos registros que interagem entre si em um ambiente didático. Tomando as ideias de Saussure (2008) apresentamos, a seguir na Figura 1, um esquema triático que leva em conta o modo como Duval (2004, p. 16) concebe o registro.

**Figura 1:** esquema constitutivo do registro de representação semiótica.



**Fonte:** os autores a partir dos trabalhos de Duval (1995, 2003, 2004).

No esquema da Figura 1, observamos que o registro se reveste:

- como na concepção de Saussure (2008, p. 131 e 132), de uma entidade que possui um conteúdo próprio (um conceito), que não é o mesmo do objeto representado, e forma que permite levar em conta o sistema no qual ele foi produzido como na analogia da folha do papel em que um lado não pode ser cortado sem que o outro lado também o seja;

- do objeto representado.

É importante salientar, e isto é fundamental na elaboração da semiosfera da aprendizagem matemática, que há, para um mesmo objeto matemático, muitos registros que o representam e que cada um desses registros comporta o objeto, mas revela mais fortemente uma das suas facetas. É esta a ideia que está por traz da hipótese fundamental de aprendizagem matemática em Duval (1995, p.67; 2012A, p. 282): coordenar diversos registros para atingir um objetivo de aprendizagem, chegar ao objeto matemático por meio de suas diversas faces.

### 3 ESTUDO DE ALGUNS EXEMPLOS

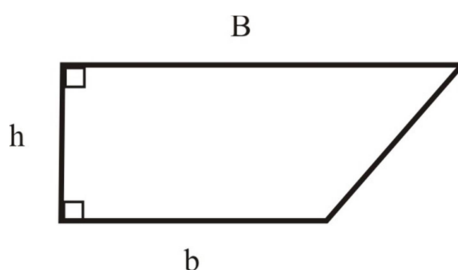
Nesta sessão, faremos o estudo de algumas situações estabelecendo alguns elementos semióticos que participam em torno da resolução do **Problema e Atividade** a seguir.

#### - Problema

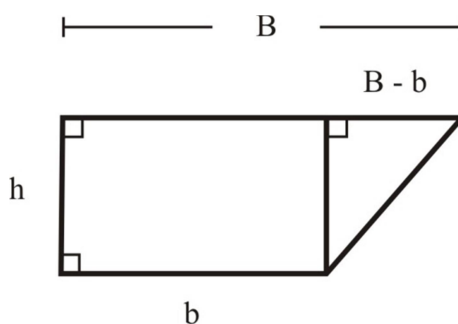
Estabelecer a fórmula da área do trapézio a seguir.



Um primeiro olhar é necessário para identificar os elementos descritos na figura e **designar** cada um deles, o que pode levar, por exemplo, à figura a seguir:



Operações nesta figura podem conduzir ainda à figura seguinte para determinar a fórmula para o cálculo da área deste trapézio.



Finalmente, a conta pode ser efetuada:

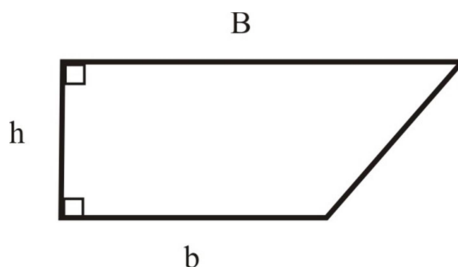
$$bh + \frac{(B-b)h}{2} = \frac{(B+b)h}{2}$$

Diversos elementos semióticos interagiram, neste procedimento, para que a solução pudesse ser efetuada. Entre eles, citamos:

- a apreensão discursiva que dirige o trabalho de resolução desde o discurso para retirar os elementos próprios formais. O enunciado do problema não diz em função de que a área deverá ser calculada; é preciso inferir. Neste caso entre em jogo também a função de expansão discursiva, além das operações de designação da função referencial;
- a apreensão gestáltica, que interfere na visualização e na identificação dos elementos a serem colocados na figura, em conjunto com a apreensão operatória, para permitir o acréscimo de uma nova linha à figura original. Esta linha permite identificar, no trapézio, o retângulo de lados  $b$  e  $h$  e o triângulo retângulo de dimensões  $(B - b)$  e  $h$ . Esta operação é denominada reconfiguração intermediária e é bastante comum no ensino de geometria em todos os níveis de ensino: é um dos tipos possíveis de modificação mereológica (ver Tabela 1 em Duval, 2012B, p. 127, ou Quadro 1, em Moretti e Brandt, 2015, p. 604).
- a mudança de dimensão para buscar elementos de resolução. A questão proposta refere-se a área de dimensão 2, mas a construção do segmento de reta para formar o retângulo e o triângulo é um elemento de dimensão 1, como também as medidas dos lados do retângulo e do triângulo para obtenção das áreas parciais que comporão a área final da figura.
- o conteúdo geométrico: área, propriedades, classificação e elementos de figuras planas.

As funções discursivas são fundamentais na resolução deste problema que poderia mudar bastante o nível de dificuldade se o problema fosse dado da seguinte forma:

Estabelecer a fórmula da área do trapézio a seguir.



Neste caso, não é preciso inferir em função do que é preciso calcular a área, uma vez que as designações dos elementos significativos da figura já foram fornecidas. No entanto, uma dificuldade ainda permanece que é o traço a ser efetuado para formar o triângulo e o retângulo. É bem provável que o problema nesta versão tenha um índice de acerto maior do que o problema em sua primeira versão.

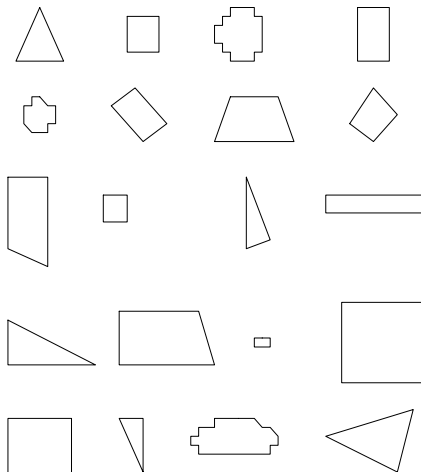


### - Atividade

A discriminação visual é capacidade para identificar semelhanças e diferenças entre objetos. A criança ao classificar um conjunto de objetos, com certas características (por exemplo, cor, forma e tamanho), utiliza a sua discriminação visual (GORDO, 1993, p. 31). Esta capacidade pode envolver atividades tais como: identificar características de figuras geométricas, descobrir as diferenças entre dois desenhos, descobrir critérios que conduzem a determinadas classificações ou ordenações, entre outras.

A atividade, a seguir, tratada em Moretti (2013), que pode ser proposta para as séries iniciais do ensino fundamental, permite que se estabeleça um vocabulário adequado de geometria na aquisição da linguagem formal.

Observe atentamente as semelhanças e diferenças das figuras abaixo.



a) Pintar com a mesma cor as figuras que você acha que tem alguma coisa em comum.

Iremos nos referir a essas figuras pela posição matricial que elas ocupam. Por exemplo, designamos F13 a circunferência localizada na primeira linha e terceira coluna.

A pergunta (a) é uma primeira que pode ser efetuada e que deixa bem à vontade a criança para fazer a sua escolha. Ela pode pintar figuras com o mesmo número de lados, figuras arredondadas, figuras pequenas ou grandes, etc. Mas outras questões podem ser direcionadas para que certas características das figuras sejam discriminadas e o vocabulário formal seja enriquecido. Por exemplo, marcar as figuras F11 e F33 e perguntar aos alunos o que elas têm em comum. Algumas crianças podem dizer que as figuras possuem três “bicos” cada um. É nesse momento que se faz presente a necessidade do filtro com a linguagem

formal estabelecida como a ação didática docente, é hora de acertar o vocabulário e falar de ângulo, vértice e voltar às figuras para que eles possam discriminar certa variedade de ângulos e notar a diferença entre um e outro.

Este exercício possui muitas variantes que podem depender também das respostas anteriores dos alunos. Uma criança pode destacar as figuras F21, F32 e F43 como pequenas. A partir dessa resposta, outras questões podem ser colocadas para discriminar novas características das figuras escolhidas e que estão também presentes em figuras tamanhos maiores.

Diversos elementos semióticos estão presentes neste tipo de atividade que objetivava a apreensão de elementos de figuras planas e de aquisição da linguagem formal. Destacamos:

- a apreensão gestáltica que permite discriminar características qualitativas: formas retilínea, arredondadas, etc; posição espacial e tamanho das figuras; diferenças nos tamanhos das áreas das figuras; figuras com uma característica em comum, mas que possuem outras características que as diferenciam;
- conteúdo geométrico: classificação de figuras planas, ângulo, vértice, arestas, área, etc.

Este conjunto de exercícios concorre para a formulação de uma semiosfera do olhar voltada para a discriminação visual - a discriminação de características de formas planas.

Salientamos que tanto no **Problema** quanto na **Atividade** há a presença do objeto tratado (conteúdo) uma vez que é a partir dele que se consegue identificar os registros para que se elabore a semiosfera de aprendizagem. Portanto, não há semiosfera de aprendizagem matemática sem um objeto ostensivo claramente definido.

### **3 Objetos ostensivos e não ostensivos: rede de semiosferas de aprendizagem matemática**

É importante caracterizar bem a diferença entre objetos não ostensivos dos ostensivos para bem definir uma rede de semiosferas de aprendizagem.

Os objetos ostensivos caracterizam-se por terem uma natureza sensível, uma certa materialidade e que, por este fato, adquire para o sujeito uma realidade perceptível (BOSCH e CHEVALLARD, 1999, p. 90). Por outro lado, esses mesmos autores definem os objetos não ostensivos como sendo

...todos esses “objetos” que como as ideias, intuições, ou os conceitos, existem institucionalmente – no sentido que lhe atribuímos uma existência, sem, portanto, serem vistos, ditos, entendidos, percebidos por eles mesmos: eles só podem ser

evocados ou invocados pela manipulação adequada de certos objetos ostensivos associados (uma palavra, uma frase, um grafismo, uma escrita, um gesto ou até mesmo um longo discurso). BOSCH e CHEVALLARD (1999, p. 90)

Na teoria de Duval (2016, 1995), cada objeto de aprendizagem matemática possui os seus próprios registros (é preciso descobri-los!) que são os responsáveis por formar a semiosfera de aprendizagem em matemática. Quando se fala aqui em objeto, mais geralmente, trata-se do objeto ostensivo. Não é muito frequente que se tenha um registro que seja comum a mais de um objeto em matemática, mas para um conceito - um objeto não ostensivo é bem possível encontrar uma boa variedade de registros comuns. Na aprendizagem matemática procura-se chegar aos objetos não ostensivos (os conceitos) por meio dos objetos ostensivos que podem se traduzir numa variedade importante de registros. Assim, um registro ligado a um objeto ostensivo pode estar também ligado a mais de um objeto não ostensivo. É esta ligação entre registros dos objetos não ostensivos que pode permitir que se crie uma rede de semiosfera que religa diversos conceitos que possuem elementos conceituais comuns.

Tomemos por exemplo a noção de área de superfícies planas limitadas. A área é definida como uma medida, sob certas condições, associado a essa superfície. A noção de área é um desses objetos não ostensivos, mas o seu ensino é feito a partir de vários objetos ostensivos tais como: a definição de área (registro discursivo), cálculo de área de polígonos, do círculo e de suas partes. Em comum, por exemplo, ao cálculo da área dos polígonos, tem-se o estudo do que seja um polígono (objeto não ostensivo), a nomenclatura, os diversos tipos, os seus elementos (ângulos, diagonais, vértices, lados, etc.). O conceito de área é ainda parte de um conceito ainda mais amplo, o conceito de medida que perpassa todos os níveis de ensino de matemática.

## CONCLUSÕES

Cada semiosfera da aprendizagem em matemática não é isolada e pode interligar-se a outras semiosferas para formar uma rede de semiosferas:

Os níveis da semiosfera compreendem um grupo interligado de semiosferas, cada um deles sendo simultaneamente participante do diálogo (como parte da semiosfera) e o espaço de diálogo (a semiosfera como um todo). LOTMAN (2005, p. 205)

Estes elos das ligações são os registros comuns a mais de um dos objetos não ostensivos. Um objeto não ostensivo pode comportar uma diversidade de registros e alguns deles podem ser, também, registros de outro objeto não ostensivo. Assim, dois conceitos em matemática podem ter em comum um ou mais registro de representação semiótica. Mesmo que esses registros sejam comuns, é importante salientar que o que deve ser bastante levado em conta é como eles são coordenados entre si.

Com a ideia de semiosfera da aprendizagem em matemática procuramos criar uma sinergia entre diversos registros visando um objeto de aprendizagem e ressaltar a importância da linguagem formal na aprendizagem matemática, mais do que em qualquer outra disciplina. Levar em conta a linguagem formal na aprendizagem significa poder contar com as várias funções discursivas. Uma razão muito forte para isso é que na aprendizagem da matemática, por não termos acesso direto aos objetos de aprendizagem, tratamos apenas de suas representações, diferentemente do que ocorre em outras disciplinas.

Um conceito pode comportar diversos objetos de aprendizagem de matemática e, por consequência, uma rede de semiosferas pode ser formada: pensamos que um currículo de matemática para o ensino básico pode ser elaborado também em termos de registros para formar e conectar as diversas semiosferas dos objetos de aprendizagem matemática.

### **Referências bibliográficas**

BRANDT, Celia F., MORETTI, Mércles T., BASSOI, Tânia S. Estudo das funções do discurso na resolução de problemas matemáticos. *Educação Matemática Pesquisa (Online)*, v.16, 2014.

(Disponível em <http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/issue/view/1222>).

BOSCH, Mariana; CHEVALLARD, Yves. La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs: objet d'étude et problématique. *RDM*, v. 19, n. 1, 1999.

DIONIZIO, Fátima Q.; BRANDT, Celia F.; MORETTI, Mércles T. Emprego das Funções Discursivas da Linguagem na Compreensão de Erros de Alunos em uma Atividade que Envolve Noções de Trigonometria. *Perspectivas da Educação Matemática*, v. 7 (Número temático: Didática da Matemática), 2014.

(Disponível em <http://seer.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/901>).

DUVAL, R. Questions épistémologiques et cognitives, avant d'entrer dans une classe de mathématiques. Texto a ser publicado em francês e português em 2016 na REVEMAT.

\_\_\_\_\_. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Trad. Mércles T. Moretti. *REVEMAT*, v.7, n.2, Florianópolis: UFSC/MTM/PPGECT, 2012A.

(Disponível em <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/issue/view/1883>).

\_\_\_\_\_. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Trad. Méricles T. Moretti. REVEMAT, v.7, n.1, UFSC/MTM/PPGECT, Florianópolis, 2012B (Disponível em <http://www.periodicos.ufsc.br/index.php/revemat>)

\_\_\_\_\_. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Trad. Méricles T. Moretti. REVEMAT, v.7, n.1, Florianópolis: UFSC/MTM/PPGECT, 2012B. (Disponível em <http://www.periodicos.ufsc.br/index.php/revemat>).

\_\_\_\_\_. Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar os registros de representações semióticas. Org. Tânia M. M. Campos. Trad. Marlene A. Dias. São Paulo: Proem Editora, 2011.

\_\_\_\_\_. Les problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo. Trad. Myrian V. Restrepo. Santiago de Cali: Merlín I. D., 2004.

\_\_\_\_\_. Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Berne: Peter Lang. 1995.

FROSTIG, M. e HORNE, D. The Frostig Program for the Development of Visual Perception. Chicago: Follet Publishing Co., 1964.

GORDO, M. F. A visualização espacial e a aprendizagem da Matemática: Um estudo no 1º ciclo do Ensino Básico. 1993. 189f. Dissertação (Mestrado em Ciências da Educação – Educação e Desenvolvimento) – Universidade Nova de Lisboa, Lisboa, 1993.

HOFFER, A. R. Mathematics Resource Project: Geometry and Visualization. Palo Alto, Calif.: Creative Publications, 1977.

LOTMAN, Yuri M. The universe of the mind: a semiotic theory of culture. Trad. Ann Shukman. Londres: I. B. Tauris & Co. LTD, 1990.

LOTMAN, Yuri M. La semiosfera: semiótica de la cultura y del texto. Trad. Desiderio Navarro. Madrid: Ediciones Cátedra, 1996.

LOTMAN, Jury. On the semiosphere. Tradução Wilma Clark. Sign Systems Studies, 33.1, 2005.

MORETTI, Méricles T. Semiosfera do olhar: um espaço possível para a aprendizagem da geometria. Revista Acta Scientiae. , v.15, 2013.

<http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/568/679>

RADFORD, Luis. Connecting theories in mathematics education: challenges and possibilities. ZDM Mathematics Education 40:317–327, 2008.

VAN HIELE, P. M. e VAN HIELE-GELDOF, D. A method of initiation into geometry at secondary Scholl. In H. Freudenthal. Report on methods of initiation into geometry at secondary schools (p. 67-80). Groningen: J. B. Wolters, 1958.